Примена брзе Фуријеове трансформације на нумеричко одређивање Фуријеовог реда и Фуријеовог интеграла

Дискретна Фуријеова трансформација и брза Фуријеова трансформација

Посматрајмо секвенцу која се састоји од N Дираковых импулса (делта функција) у временском домену,

$$x_{\delta T}(t) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \, \delta(t - n\Delta t). \tag{1}$$

Импулси су лоцирани у тренуцима $0, \Delta t, 2\Delta t, ..., (N-1)\Delta t$, где је Δt временски корак и $N\Delta t = T$. Амплитуде импулса су $x_0, x_1, ..., x_{N-1}$. Периодичним понављањем секвенце (1), на основу релације $x_\delta(t + lT) = x_{\delta T}(t)$, где је l произвољан цео број, добија се периодична секвенца делта импулса,

$$x_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \, \delta(t - n\Delta t), \quad x_{n+lN} = x_n. \tag{2}$$

Импулси су лоцирани у тренуцима $n\Delta f$, где је n цео број, $n \in (-\infty, +\infty)$.

Фуријеова трансформација (Фуријеов интеграл) секвенце (2) је периодична поворка делта импулса лоцираних на учестаностима $k\Delta f$, где је $\Delta f = \frac{1}{T}$, односно $\Delta t \Delta f = \frac{1}{N}$, а k цео број, $k \in (-\infty, +\infty)$. Амплитуде импулса у фреквенцијском домену су

$$X_k = \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \, \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j} \frac{kn}{N}} = \Delta f \sum_{n=0}^{N-1} x_n \, \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j} \frac{kn}{N}}, \tag{3}$$

а период понављања је $N\Delta f = \frac{1}{\Delta t}$. Инверзна Фуријеова трансформација секвенце (3) је

$$x_n = \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} X_k \, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{j} \frac{nk}{N}} = \frac{1}{N \, \Delta f} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{j} \frac{nk}{N}}. \tag{4}$$

Трансформација периодичне секвенце делта импулса у временском домену у одговарајућу секвенцу у комплексном домену, према једначини (3), је дискретна Фуријеова трансформација (DFT), а трансформација из комплексног домена у временски, према (4), је инверзна дискретна Фуријеова трансформација (IDFT).

У нумеричким алгоритмима се узима да је $\Delta f = 1$, чему одговара нормализована DFT, односно IDFT, према релацијама

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \, \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{j}\frac{kn}{N}}, \; k = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{5}$$

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{j}\frac{nk}{N}}, \; n = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{6}$$

Брза Фуријеова трансформација (FFT) је нумерички алгоритам за рачунање DFT, а IFFT је алгоритам за рачунање IDFT[1].

DFT/IDFT су **егзактне** трансформације периодичне секвенце делта импулса у једном домену у периодичну секвенцу у другом домену.

FFT/IFFT алгоритми се могу применити за **приближно** израчунавање коефицијената Фуријеовог реда и Фуријеовог интеграла, као алгоритми за приближну (нумеричку) интеграцију.

Фуријеов ред

Посматрајмо периодичну функцију времена $x(t)$, чији је основни период *T*. Та функција се може развити у Фуријеов ред,

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \, \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{j} kt}{T}}, \tag{7}$$

где су учестаности комплексних експоненцијала $0, \pm f_0, \pm 2 f_0, \ldots,$ $f_0 = \dfrac{1}{T}$ (математичке учестаности). Коефицијенти Фуријеовог реда се одређују из израза

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \, \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{j} kt}{T}} \, \mathrm{d}t, \, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{8}$$

а имају димензију функције $x(t)$. Ако је функција $x(t)$ реална, коефицијенти Фуријеовог реда имају конјуговану симетрију, односно $c_{-k} = (c_k)^*$.

Интеграл у (8) се може приближно одредити нумерички, поопштеним методом правоугаоника (методом средње тачке), што је еквивалентно примени DFT. Функцију $x(t)$ посматрамо само на основном интервалу $t \in [0, T)$. DFT инхерентно укључује периодичко продужење, тако да се аутоматски добија периодична функција периода *T*. Ако је број одбирака *N*, временски корак је $\Delta t = T / N$, а учестаност одабирања је $f_\mathrm{s} = \dfrac{1}{\Delta t}$.

Да би се добили коефицијенти Фуријеовог реда, треба израчунати FFT функције $x(t)$ и резултат помножити са $\Delta t / T$ (односно поделити са *N*).

---

[1] У неким алгоритмима IDFT изоставља се мултипликатор $\dfrac{1}{N}$ у изразу (6).

Број коефицијената Фуријеовог реда у (6) је бесконачан, а FFT даје апроксимацију само првих $\frac{N}{2}-1$ коефицијената (за парно *N*). Спектралне компоненте које даје FFT до учестаности $f_\mathrm{s}/2$ одговарају позитивним учестаностима у (8), редом за $k = 0, 1, 2, \ldots, \frac{N}{2}-1$. Компоненте између $f_\mathrm{s}/2$ и f_s одговарају негативним учестаностима (конјуговано-комплексни део спектра), само што су транслиране удесно за f_s, а одговарају $k = -1, -2, \ldots, -\frac{N}{2}+1$, редом, идући од последњег члана према средини низа добијеног применом FFT алгоритма.

Да би се добиле спектралне компоненте које одговарају природним учестаностима и ефективним вредностима, модуле добијене FFT-ом треба поделити са $\sqrt{2}$.

Спектар који даје програм pSpice су амплитуде за физичке (ненегативне) учестаности; pSpice даје два пута веће резултате него FFT. Неки други програми за анализу електричних кола, као што је LTspice, дају ефективне вредности за физичке (ненегативне) учестаности, које су $\sqrt{2}$ пута веће од FFT резултата. Једносмерна компонента је иста у свим случајевима.

Фуријеов интеграл

Фуријеова трансформација (Фуријеов интеграл) дефинисана је изразом

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t}\, \mathrm{d}t\,. \tag{9}$$

Ако је функција $x(t)$ реална, њен спектар $X(f)$ је у општем случају континуалан, а увек има конјуговану симетрију.

Инверзна Фуријеова трансформација је дефинисана изразом

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f t}\, \mathrm{d}f\,. \tag{10}$$

Фуријеов интеграл се може приближно (нумерички) израчунати помоћу дискретне Фуријеове трансформације, односно FFT алгоритма, на следећи начин. У општем случају, $x(t)$ траје бесконачно дуго. Међутим, временски прозор за FFT ($0 \le t < T$) је коначан. Тај прозор треба да обухвати што већи део енергије функције $x(t)$, односно треба да је $x(t) \approx 0$ за $t < 0$ и $t \ge T$. Временски корак Δt треба да буде довољно кратак да се функција $x(t)$ може добро представити одбирцима, водећи рачуна о теореми одабирања. При томе је $T/\Delta t = N$ цео број. Формира се секвенца одбирака функције $x(t)$ и израчуна FFT. Да би добијена секвенца у комплексном (фреквенцијском) домену коректно апроксимирала Фуријеов интеграл, резултат добијен FFT алгоритмом мора да се помножи са Δt.

Спектар бездимензионе функције $x(t)$ има димензију времена.

Инверзни Фуријеов интеграл

Треба да израчунамо инверзну Фуријеову трансформацију функције $X(f)$, где је f учестаност, према изразу (10). Претпостављамо да је функција $X(f)$ позната за еквидистантан низ учестаности $0, \Delta f, 2\Delta f, ..., \left(\frac{N}{2}-1\right)\Delta f$ (N је парно) и да одговара реалној функцији $x(t)$.

Низ најпре треба проширити на укупно N чланова, где је N-ти члан конјуговано-комплексан члану на учестаности Δf, ($N-1$)-ви члан је конјуговано-комплексан члану на $2\Delta f$ и тако даље. Први члан низа („једносмерна компонента“) мора да буде чисто реалан. Члан чији је индекс $\frac{N}{2}$ такође мора да буде чисто реалан, а најједноставније је да се узме једнаким нули. Као пример, то проширење се у програмима Octave и Matlab ради линијом кода

```
ffts=[X(1:n) 0 conj(fliplr(X(2:n)))];
```

где је `n`=$N/2$, а `fliplr` функција која преврће редослед чланова низа.

Затим се примењује IFFT. С обзиром на то да се код рачунања IFFT резултат дели са N, да би се добила коректна представа функције $x(t)$, резултат IFFT треба помножити са[2] $\frac{1}{\Delta t} = N\Delta f = f_s$.

Уколико је потребно да се за задату побуду у временском домену и задату преносну функцију у комплексном домену израчуна одзив у временском домену, поступак је следећи. Израчуна се FFT задате побуде, помножи (члан по члан) конјуговано-симетрично проширеном преносном функцијом (укупан број одбирака у временском домену исти је као у комплексном домену) и израчуна IFFT. При томе се може прескочити множење са Δt при рачунању FFT и дељење са Δt при рачунању IFFT уколико IFFT алгоритам дели резултат са N.

[2] Уколико се у IFFT алгоритму не дели са N, резултат треба помножити са Δf.