

Методe заснованe на сингуларној декомпозицији

Претпоставимо да се електрички мали објекат налази на непознатој позицији, дефинисаној вектором положаја \mathbf{t} . Средина у којој се налази објекат је линеарна и уопштем случају нехомогена, познате пермитивности ϵ_b . Позицију објекта одређујемо помоћу произвољног антенског низа који се састоји од M елемената. Ради једноставности, сматрамо да низ ради на једној учестаности и да може да измери параметре расејања, са и без присуства објекта. Измерене податке смештамо мултистатичку матрицу података која се дефинише на следећи начин

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \Delta s_{1,1} & \cdots & \Delta s_{1,M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta s_{M,1} & \cdots & \Delta s_{M,M} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где је $\Delta s_{i,j}$ разлика коефицијената трансмисије између i -те и j -те антене измерених у присуству објекта и када је објекат уклоњен. У случају електрички малих расејача, разлика коефицијента трансмисије гласи

$$\Delta s_{ij} \approx -\frac{j\omega v(\epsilon - \epsilon_b)}{2a_i a_j} \mathbf{E}_{\text{inc}}(\mathbf{t}, \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{E}_{\text{inc}}(\mathbf{t}, \mathbf{r}_j), \quad (2)$$

где је $\mathbf{E}_{\text{inc}}(\mathbf{t}, \mathbf{r}_i)$ поље које у тачки \mathbf{t} ствара i -та када је објекат уклоњен (инцидентно поље у средини пермитивности ϵ_b), a_i интензитет инцидентног таласа на приступу i -те антене, ϵ пермитивност објекта, v запремина објекта и ω кружна учестаност. Без губитка општости, сматраћемо да су антене исте и да су довољно удаљене од објекта тако да су интензитети инцидентних таласа приближно исти на свим приступима ($a_1 = \dots = a_M$). У том случају, мултистатичка матрица гласи

$$\mathbf{H} \approx K \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{\text{inc}}(\mathbf{q}, \mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{E}_{\text{inc}}(\mathbf{q}, \mathbf{r}_1) & \cdots & \mathbf{E}_{\text{inc}}(\mathbf{q}, \mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{E}_{\text{inc}}(\mathbf{q}, \mathbf{r}_M) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{E}_{\text{inc}}(\mathbf{q}, \mathbf{r}_M) \cdot \mathbf{E}_{\text{inc}}(\mathbf{q}, \mathbf{r}_1) & \cdots & \mathbf{E}_{\text{inc}}(\mathbf{q}, \mathbf{r}_M) \cdot \mathbf{E}_{\text{inc}}(\mathbf{q}, \mathbf{r}_M) \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где је $K = K_{ij} = -\frac{j\omega v(\epsilon - \epsilon_b)}{2a_i a_j}$ непознати коефицијент који зависи од особина расејача. Мултистатичка матрица се даље може записати у облику

$$\mathbf{H} \approx K \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{\text{inc}}(\mathbf{t}, \mathbf{r}_1) \\ \vdots \\ \mathbf{E}_{\text{inc}}(\mathbf{t}, \mathbf{r}_M) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{\text{inc}}(\mathbf{t}, \mathbf{r}_1) & \cdots & \mathbf{E}_{\text{inc}}(\mathbf{t}, \mathbf{r}_M) \end{bmatrix}, \quad (4)$$

односно

$$\mathbf{H} \approx K \mathbf{g}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{t})^T, \quad (5)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{\text{inc}}(\mathbf{q}, \mathbf{r}_1) \\ \vdots \\ \mathbf{E}_{\text{inc}}(\mathbf{q}, \mathbf{r}_M) \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Претходни случај се може уопштити за случај N малих расејача. Под претпоставком да је међусобни утицај расејача је слаб, (5) постаје

$$\mathbf{H} \approx \sum_{n=1}^N K_n \mathbf{g}(\mathbf{t}_n) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{t}_n)^T, \quad (7)$$

где је K_n непознати коефицијент рефлексije n -тог расејача који се налази на локацији \mathbf{t}_n , $n = 1, \dots, N$. У даљој анализи ћемо усвојити да су све антене исто оријентисане, те да израчено поље има само z -компоненту. Приближан израз за мултистатичку матрицу у том случају је

$$\mathbf{H} \approx \sum_{n=1}^N K_n \mathbf{g}(\mathbf{t}_n) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{t}_n)^T, \quad \mathbf{g}(\mathbf{t}_n) = \begin{bmatrix} E_{\text{inc},z}(\mathbf{t}_n, \mathbf{r}_1) \\ \vdots \\ E_{\text{inc},z}(\mathbf{t}_n, \mathbf{r}_M) \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Са друге стране, мултистатичка матрица се помоћу сингуларне декомпозиције може изразити у облику

$$\mathbf{H} = \sum_{n=1}^M \sigma_n \mathbf{u}_n \cdot \mathbf{v}_n^H, \quad (9)$$

где су σ_n сингуларне вредности, а \mathbf{u}_n и \mathbf{v}_n одговарајући сингуларни вектори, $n = 1, \dots, M$. Поредећи (8) и (9), долази се до следећих закључака:

- Првих N сингуларних вредности потичу од објеката. Ове сингуларне вредности су пропорционалне коефицијентима K_n , односно, $\sigma_n \propto K_n$, $n = 1, \dots, N$.
- Преосталих $M - N$ сингуларних вредности потичу од шума и приближно су једнаке нули $\sigma_{N+1} \approx \dots \approx \sigma_M \approx 0$.
- Сингуларни вектори $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N$ потичу од објеката, $\mathbf{u}_n \approx \mathbf{g}(\mathbf{t}_n) / \|\mathbf{g}(\mathbf{t}_n)\|$, $n = 1, \dots, N$.
- Сингуларни вектори $\mathbf{u}_{N+1}, \dots, \mathbf{u}_M$ потичу од шума.
- Како су сингуларни вектори су међусобно ортогонални, $\mathbf{u}_i^H \mathbf{u}_j = \delta_{ij}$, следи да су сингуларни вектори који потичу од шума ортогонални на позиције објекта, односно, $\mathbf{u}_i^H \mathbf{g}(\mathbf{t}_n) = 0$, $i = N+1, \dots, M$, $n = 1, \dots, N$.

Претходна анализа је изведена за случај електрички малих расејача који су довољно међусобно удаљени. Добијени резултати се могу уопштити и за случај тела произвољних димензија, једино што тада тумачење броја N , односно броја значајних сингуларних вредности, није тако једноставно као код малих објеката. У овом курсу се нећемо упуштати у његову анализу, али напомињемо да ће зависити димензија испитиваних објеката. Са становишта алгорита, битно је да број N што прецизније одредимо. Приближно га можемо добити из услова $\sigma_N \approx 0.01\sigma_1$.

MUSIC

Алгоритам MUSIC (MUltiple Signal Classification) заснован је на особинама сингуларне декомпозиције мултистатичке матрице. Алгоритам је осмислио R.O. Schmidt, а оригинално је био намењен за естимацију правца наилаaska сигнала и локализацију емитера.

Дефинишимо област претраживања у облику униформне мреже тачака \mathbf{q}_l , $l=1,\dots,L$. За сваку тачку из мреже $\mathbf{q}_l = (x_l, y_l, z_l)$ рачунамо суму

$$S_l = \sum_{i=N+1}^M \left\| \mathbf{u}_i^H \mathbf{g}(\mathbf{q}_l) \right\|_2^2, \quad (10)$$

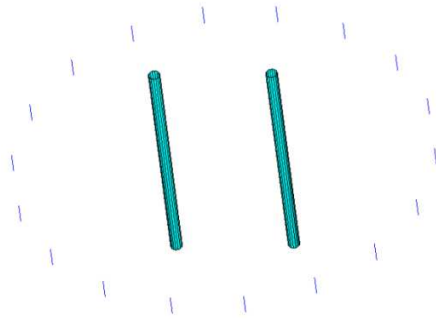
где је \mathbf{u}_i i -ти сингуларни вектор и

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}_l) = \begin{bmatrix} E_{\text{inc},z}(\mathbf{q}_l, \mathbf{r}_1) \\ \vdots \\ E_{\text{inc},z}(\mathbf{q}_l, \mathbf{r}_M) \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Уколико тачка припада објекту, вектор $\mathbf{g}(\mathbf{q}_l)$ је пропорционалан неком од првих N сингуларних вектора, односно, ортогоналан на сингуларне векторе са индексима $i = N+1, \dots, M$. Због тога ће вредност суме (10) бити мала у том случају. У супротном, када тачка не припада објекту, вектор $\mathbf{g}(\mathbf{q}_l)$ није пропорционалан нити једном сингуларном вектору, а самим тим није ни ортогоналан на њих. Због тога ће вредност суме (10) бити мања када тачка припада објекту него када му не припада. Саму слику добијамо као

$$I(x_l, y_l, z_l) = \frac{1}{\sum_{i=N+1}^M \left\| \mathbf{u}_i^H \mathbf{g}(\mathbf{q}_l) \right\|_2^2}. \quad (12)$$

Задатак: примена алгоритама MUSIC



Слика 1. Цилиндри и кружни низ полуталасних дипола.

- У програму WIPL-D направити два модела. Први модел се састоји од кружног низа од 18 полуталасних дипола. Радна учестаност низа је $f = 2 \text{ GHz}$, полупречник низа $R = 0,7 \text{ m}$.
- Други модел, поред низа, садржи и два метална цилиндра полупречника $a = 2 \text{ cm}$ и висине $h = 1 \text{ m}$. Осе цилиндара пролазе кроз тачке $x_1 = -0,2 \text{ cm}$, $y_1 = 0$ и $x_2 = 0,2 \text{ cm}$, $y_2 = 0$.
- У моделу који се састоји само од низа, дефинисати мрежу претраживања као тачке у којима се рачуна блиско поље: $-0,4 \text{ m} \leq x_i, y_j \leq 0,4 \text{ m}$, $i = 1, \dots, N_x$, $j = 1, \dots, N_y$, $N_x = N_y = 50$.
- Учитати матрице расејања из оба модела и на основу њихове разлике одредити мултистатичку матрицу података.
- Учитати податке за блиско поље (z -компоненту вектора електричног поља).
- Одредити SVD декомпозицију мултистатичке матрице $[\mathbf{U} \ \boldsymbol{\Sigma} \ \mathbf{V}] = \text{svd}(\mathbf{L})$.

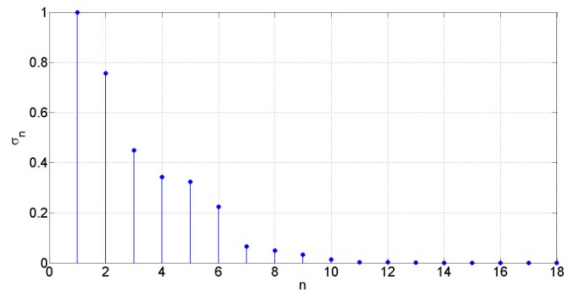
- Нацртати сингуларне вредности $\sigma = \text{diag}(\Sigma)$ и на основу графика одредити број N .

- Одредити вредност пиксела $I(i, j) = \frac{1}{\sum_{m=N+1}^M |\text{dot}(\mathbf{u}_m, \mathbf{g}(x_i, y_j))|^2}$,

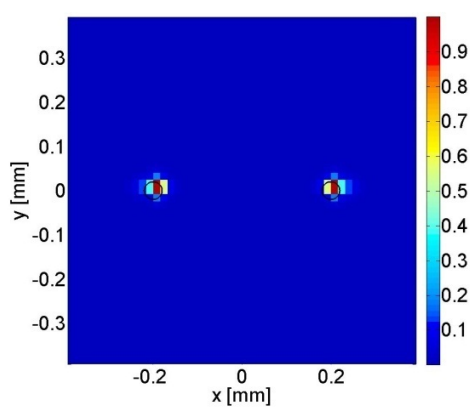
где је

$$\mathbf{u}_m = \mathbf{U}(:, m), \quad \mathbf{g}(x_i, y_j) = \begin{bmatrix} E_z(i, j, 1, 1) \\ \vdots \\ E_z(i, j, 1, M) \end{bmatrix}_{M \times 1}$$

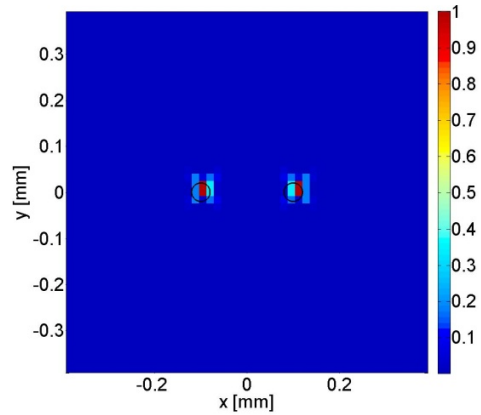
На слици 2, приказане су сингуларне вредности за посматрани проблем. Број значајних сингуларних вредности је већи од броја објеката због тога што полупречници цилиндара нису занемарљиви у односу на таласну дужину.



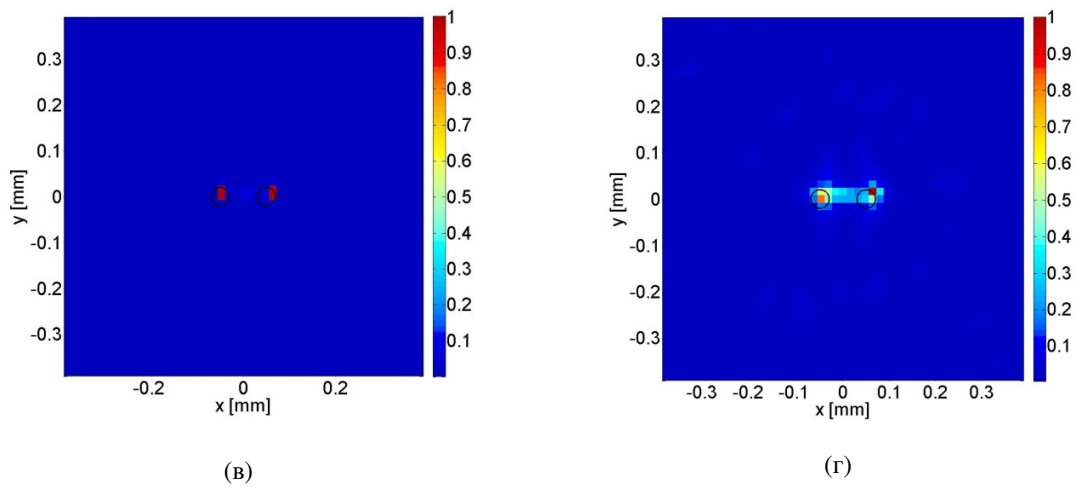
Слика 2. Сингуларне вредности мултистатичке матрице података.



(a)



(б)

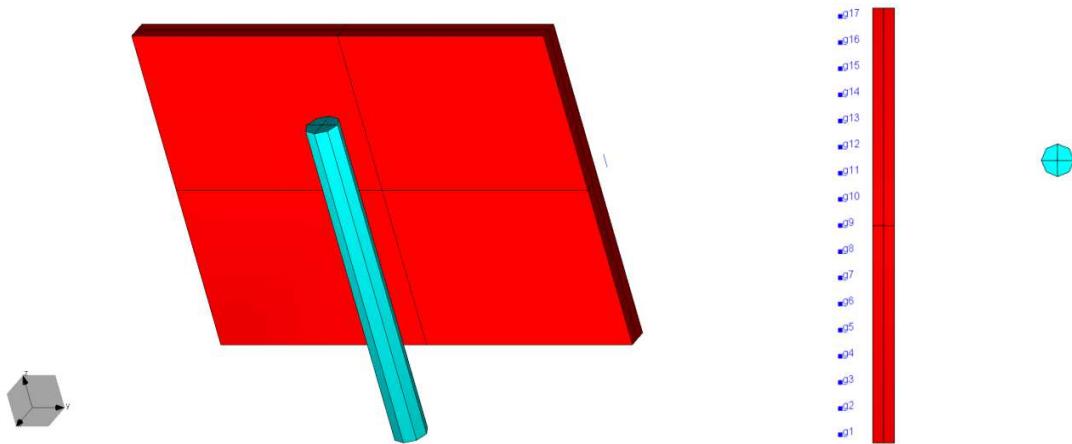


Слика 3. Реконструкција позиција цилиндара помоћу алгоритма MUSIC, када је растојање између њихових оса: (а) $d = 0,4$ m, (б) $d = 0,2$ m, (в) $d = 0,1$ m и (г) $d = 0,1$ m и када су подаци искварени адитивним белим Гаусовим шумом.

На слици 3, приказани су резултати реконструкције за различита растојања између оса цилиндара. Сlike 3а-в добијене су коришћењем података без шума, док је на слика 3г добијена након што су мерни подаци искварени додавањем белог Гаусовог шума, при чему је однос сигнал-шум био $SNR = 10$ dB. Снага шума рачуната је релативно односу на елементе мултистатичке матрице. Један од начина да се то уради у програму Matlab/Octave је

```
for i=1:M
    sig=DS(:,i);
    sig=awgn(sig,SNR,'measured');
    DS(:,i)=sig;
end
```

Задатак: Локализација објекта иза зида применом алгоритама MUSIC

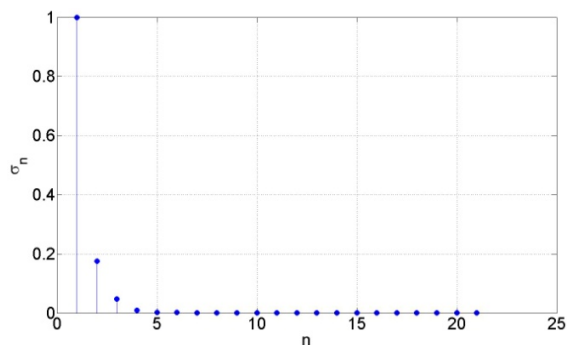


Слика 3. Модел експеримента у програму WIPL-D.

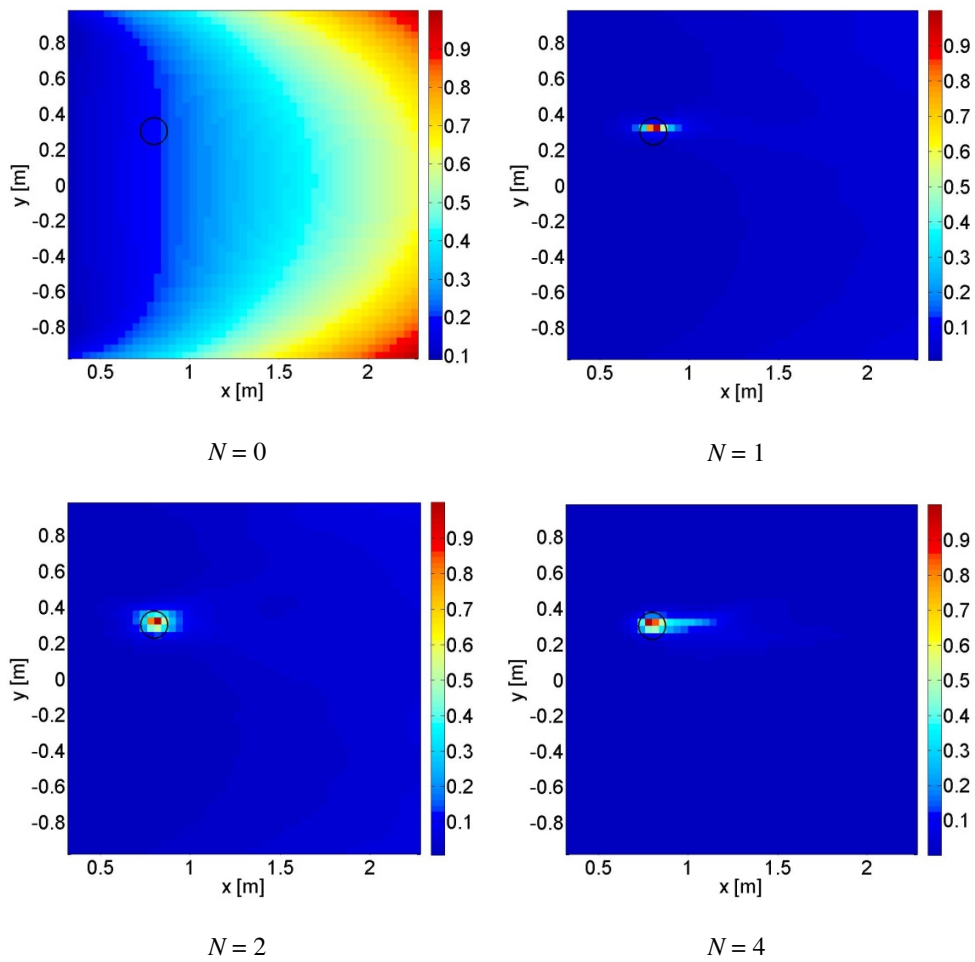
Показати принцип локализације објекта иза непровидног зида применом алгорита MUSIC. У програму WIPL-D моделовати зид као квадар димензија $0,2\text{ m} \times 2\text{ m} \times 2\text{ m}$ и пермитивности $\epsilon_r = 3$. Усвојити да се координатни почетак поклапа са центром зида. Тражени објекат представити помоћу металног цилиндра чији се центар налази у тачки са Декартовим координатама $(0,8\text{ m}, 0,3\text{ m})$. Полупречник цилиндра је $r = 7,5\text{ cm}$, а висина $H = 2\text{ m}$. За детекцију користити антенски низ од 21 полуталасних дипола који су паралелни z -оси, као на слици 3. Оса низа је дуж y -осе и удаљена је од ближе ивице зида 15 cm . Растојање између суседних дипола је $d = 10\text{ cm}$. Радна учестаност низа је $f = 1\text{ GHz}$.

Резултат:

На слици 4, приказане су нормализоване сингуларне вредности мултистатичке матрице које су добијене симулацијом објекта иза зида у програму WIPL-D. Са слике 4 одређујемо приближан број сингуларних вредности које потичу од објекта ($N \approx 2$). Реконструкције објекта, одређене за различите вредности параметра N , приказане су на слици 5. Као што је и очекивано, облик и положај објекта су најпрецизније одређени за $N = 2$.



Слика 4. Сингуларне вредности мултистатичке матрице за мерни сценарио са слике 3.



Слика 4. Реконструкције објекта иза зида применог алгоритма MUSIC добијене за различите вредности параметра N .

Метод линеарно одабирање (LSM)

Метод линеарно одабирање (*linear sampling method*) је сродан алгоритму MUSIC. Објаснићемо га на примеру локализације једног непознатог објекта. Претпоставимо да се електрички мали објекат налази на локацији одређеној вектором положаја \mathbf{t} . Као што смо видели, мултистатичка матрица је приближно

$$\mathbf{H} \approx K\mathbf{g}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{t})^T, \quad \mathbf{g}(\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} E_{\text{inc},z}(\mathbf{t}, \mathbf{r}_1) \\ \vdots \\ E_{\text{inc},z}(\mathbf{t}, \mathbf{r}_M) \end{bmatrix}. \quad (14)$$

При чему смо усвојили да се све антене зраче електрично поље са доминантном z компонентом. Претпоставимо сада да постоји такав низ коефицијената, \mathbf{f} , који је решење система једначина

$$\mathbf{H}\mathbf{f} = \mathbf{g}(\mathbf{t}). \quad (15)$$

Тиме заправо сматрамо да вектор $\mathbf{g}(\mathbf{t})$ може да се представи као линеарна комбинација колона мултистатичке матрице. Ако се уврсти (14) у (15), добија се

$$(K\mathbf{g}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{t})^T) \cdot \mathbf{f} = \mathbf{g}(\mathbf{t}). \quad (16)$$

На основу особине асоцијативности матричног производа следи да је

$$\mathbf{g}(\mathbf{t}) \cdot (K\mathbf{g}(\mathbf{t})^T \cdot \mathbf{f}) = \mathbf{g}(\mathbf{t}). \quad (17)$$

Одатле следи да вектор \mathbf{f} мора да задовољи услов

$$K\mathbf{g}(\mathbf{t})^T \cdot \mathbf{f} = 1, \quad (18)$$

односно

$$\mathbf{f} = \frac{1}{K} \frac{\mathbf{g}(\mathbf{t})}{\|\mathbf{g}(\mathbf{t})\|^2}. \quad (19)$$

Претпоставимо сада, погрешно, да се објекат налази на месту \mathbf{q} . У том случају, вектор \mathbf{f} би требало да задовољи систем једначина

$$\mathbf{H}\mathbf{f} = \mathbf{g}(\mathbf{q}), \quad (20)$$

односно

$$\mathbf{g}(\mathbf{t}) \cdot (K\mathbf{g}(\mathbf{t})^T \cdot \mathbf{f}) = \mathbf{g}(\mathbf{q}). \quad (21)$$

С обзиром да је израз у загради скаларна величина, услов (21) не може бити испуњен ако је $\mathbf{q} \neq \mathbf{t}$ (у општем случају).

Међутим, нумеричке методе ће увек изнудити неко решење чак и за систем једначина (20). Норма тако добијеног решења ће бити велика (као да систем дивергира јер га терамо да задовољи немогући услов.) Претпоставимо да решење система једначина тражимо помоћу методе најмањих квадрата и Тиховљеве регуларизације

$$\mathbf{f} = \sum_{i=1}^M \frac{\sigma_i}{\sigma_i^2 + \alpha^2} (\mathbf{u}_i^H \cdot \mathbf{g}(\mathbf{q})) \mathbf{v}_i. \quad (22)$$

Када испитивана тачка не припада објекту, вектор $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ није пропорционалан нити једном сингуларном вектору, нити је ортогоналан на њих. Због тога су сви елементи суме значајни, а сама сума је већа него када тачка припада објекту. Самим тим и норма решења

$$\|\mathbf{f}\|_2^2 = \sum_{i=1}^M \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_i^2 + \alpha^2} \right)^2 \|\mathbf{u}_i^H \cdot \mathbf{g}(\mathbf{q})\|_2^2 \quad (23)$$

ће бити већа од нормe решења добијеног у случају када тачка припада објекту.

Поступак формирања слике је врло сличан поступку описаном у примени алгоритма MUSIC. Најпре, дефинишемо тачке претраживања: \mathbf{q}_l , $l = 1, \dots, L$. За сваку тачку решавамо систем једначина по непознатим елементима вектора \mathbf{f}

$$\mathbf{H}\mathbf{f} = \mathbf{g}(\mathbf{q}_l), \quad \mathbf{g}(\mathbf{q}_l) = \begin{bmatrix} E_{\text{inc},z}(\mathbf{q}_l, \mathbf{r}_1) \\ \vdots \\ E_{\text{inc},z}(\mathbf{q}_l, \mathbf{r}_M) \end{bmatrix} \quad (22)$$

Систем решавамо помоћу сингуларне декомпозиције

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}_l) = \sum_{i=1}^M \frac{\sigma_i}{\sigma_i^2 + \alpha^2} (\mathbf{u}_i^H \cdot \mathbf{g}(\mathbf{q}_l)) \mathbf{v}_i, \quad (23)$$

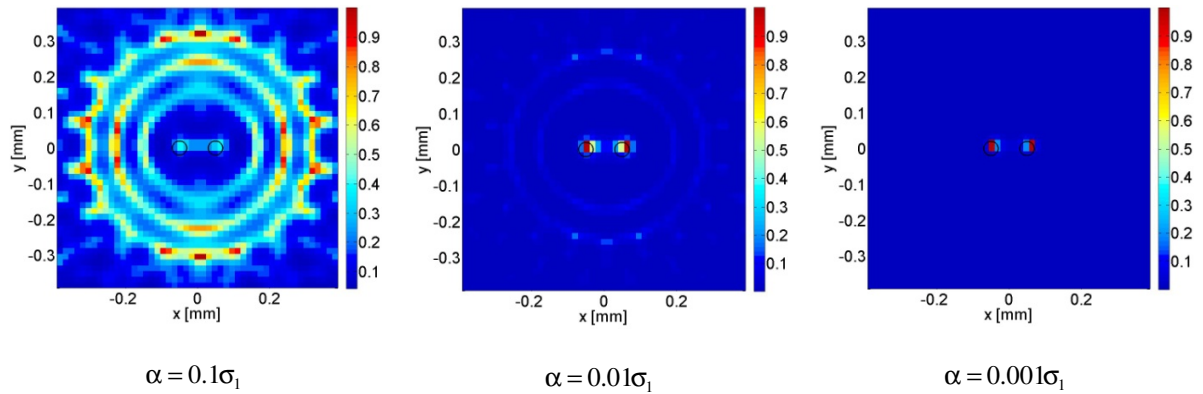
где су \mathbf{u}_i , \mathbf{v}_i сингуларни вектори матрице \mathbf{H} , а σ_i одговарајуће сингуларне вредности. Пиксел слике који се налази на месту \mathbf{q}_l одређујемо као

$$\mathbf{I}(x_l, y_l) = \frac{1}{\|\mathbf{f}(\mathbf{q}_l)\|_2^2} = \frac{1}{\sum_{i=1}^M \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_i^2 + \alpha^2} \right)^2 \|\mathbf{u}_i^H \cdot \mathbf{g}(\mathbf{q}_l)\|_2^2}. \quad (24)$$

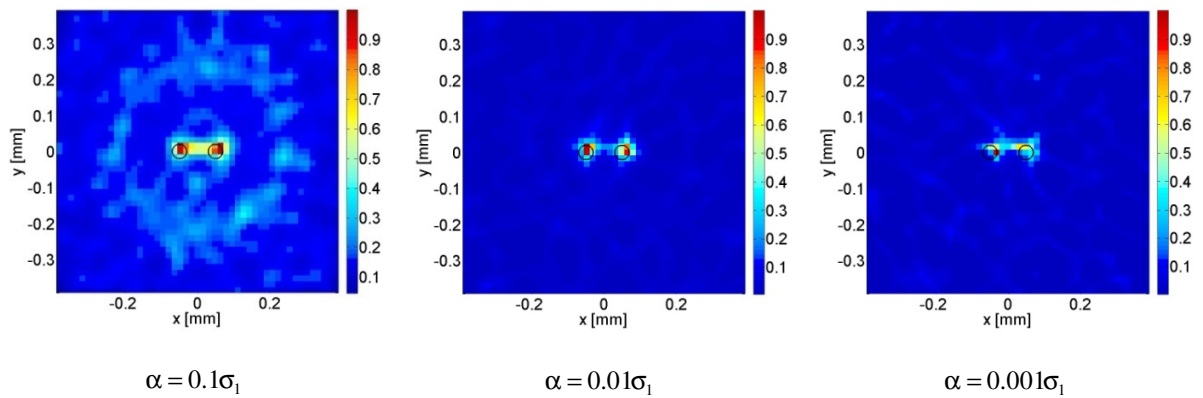
Поређењем са (13), закључујемо и да су решења врло слична.

Задатак:

Поново решити задатак са слике 1 применом алгоритма линеарно одабирање. Усвојити да је растојање између цилиндара $d = 0,1 \text{ m}$. На слици 5 су приказани резултати добијени за различите вредности параметра α у случају када нема шума. На слици 6 су приказани резултати реконструкције при односу сигнал-шум $SNR = 10 \text{ dB}$.



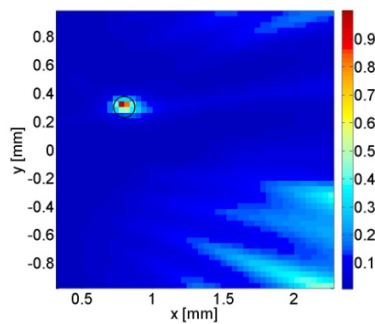
Слика 5. Резултати реконструкције применом алгоритма линеарно одабирање добијени за различите вредности параметра α . Подаци су без шума.



Слика 6. Резултати реконструкције применом алгоритма линеарно одабирање добијени за различите вредности параметра α . Подаци су искварени белим Гаусовим шумом, при чему је однос сигнал-шум $SNR = 10 \text{ dB}$.

Задатак:

Одредити локацију објекта иза зида (слика 3) применом методе линеарно одабирање. Усвојити да је $\alpha = 0.01\sigma_1$. Очекивани резултат, у случају података без шума, је приказан на слици 7.



Слика 7. Реконструкција објекта иза зида добијена применом методе линеарно одабирање.